אלגברה לינארית 2

הרצאה 7

שרון גל sharon.gal.math@gmail.com

תזכורת

הפולינום האופייני של מטריצת בלוקים משולשית הוא מכפלת הפולינומים האופייניים של הבלוקים.

משפט 4:

- תהי A מטריצת בלוקים משולשית, שהבלוקים שלה הם מטריצות ריבועיות $A_1, \dots, A_k$.
- כלומר A היא מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

- אזי: $p_A(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot p_{A_k}(\lambda)$

הוכחה:

$$\boxed{p_A(\lambda) =} \underset{\text{הגדרת פ"א}}{\downarrow} \quad \det(\lambda I_n - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda I - A_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda I - A_2 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda I - A_k \end{pmatrix} \underset{\text{מט' בלוקים}}{=} \det(\lambda I - A_1) \cdot \dots \cdot \det(\lambda I - A_k) \underset{\text{הגדרת פ"א}}{=}$$

$$\boxed{= p_{A_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot p_{A_k}(\lambda)}$$

מסקנה 1:

- תהי $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ מטריצה אלכסונית.
- אזי A לכסינה, הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ והזוגות העצמיים של A הם $(\lambda_1, \vec{e}_1), \dots, (\lambda_n, \vec{e}_n)$.

הוכחה:

- ידוע ש-

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda - \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

- הערכים העצמיים הם השורשים של הפולינום האופייני, **לכן הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.**
- כמו כן, A אלכסונית, ודומה לעצמה, כאשר $P = I_n$ (הוכחנו), לכן היא לכסינה.
- ידוע שעמודות P הם הוקטורים העצמיים, כלומר הם $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

מסקנה 2:

- תהי A מטריצה משולשית עליונה. אזי הערכים העצמיים של A הם איברי האלכסון שלה.

תרגיל 3:

יהיו $\alpha,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ונתבונן במטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

הוכיחו ש-A לכסינה אם ורק אם

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ או ($\lambda_1 = \lambda_2$ וגם $\alpha = 0$).

פתרון:

- נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$\boxed{\det(\lambda I_2 - A) =} \det\begin{pmatrix} \lambda-\lambda_1 & -\alpha \\ 0 & \lambda-\lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

- לכן הערכים העצמיים של A הם λ_1,λ_2.

- $\Rightarrow$ אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$, אז ל-A יש שני ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה.
- אם $\lambda_1 = \lambda_2$ וגם $\alpha = 0$ אז A אלכסונית בעצמה ולכן לכסינה.
- $\Leftarrow$ אם A לכסינה, נניח בשלילה ש-

$\lambda_1 = \lambda_2$ וגם ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ או $\alpha \neq 0$).

- מפילוג נקבל: $\lambda_1 = \lambda_2$ וגם $\alpha \neq 0$.
- מהיות A לכסינה ומכיוון ש-$\lambda_1 = \lambda_2$ נקבל ש-A דומה למטריצה סקלרית.
- ממשפט שהוכחנו נסיק ש-A בעצמה מטריצה סקלרית.
- בסתירה לכך ש-$\alpha \neq 0$.

למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.

משפט 5:

יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהיינה $A,B \in M_n(\mathrm{F})$, המקיימות $A \sim B$.

אזי $\boldsymbol{p_A(\lambda) = p_B(\lambda)}$.

הוכחה:

- מהיות $A \sim B$, הרי שקיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathrm{F})$ כך ש- $B = P^{-1}AP$.
- לכן מתקיים:

$\lambda I_n - B$

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda I_n - B}} = \lambda I_n - \underbrace{P^{-1}AP}_{\boldsymbol{B}} = \lambda \underbrace{\boldsymbol{P^{-1}} I_n \boldsymbol{P}}_{I_n} - P^{-1}AP = \boldsymbol{P^{-1}} \lambda I_n \boldsymbol{P} - P^{-1}AP = \boxed{\boldsymbol{P^{-1}(\lambda I_n - A)P}}$$

- מכאן ש- $(\lambda I_n - A) \sim (\lambda I_n - B)$
- ידוע שלמטריצות דומות יש דטרמיננטות שוות. לכן:

$$\boldsymbol{p_A(\lambda)} = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - B) = \boldsymbol{p_B(\lambda)}$$

תרגיל 4:

הוכיחו או הפריכו: המטריצות $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ הן דומות.

פתרון 1: נחשב את הפולינום האופייני של כל מטריצה:

$$\boxed{p_A(\lambda) =} \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda+1) - 6 = \boxed{\lambda^2 + \lambda - 6}$$

$$\boxed{p_B(\lambda) =} \det(\lambda I_2 - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1) = \boxed{\lambda^2 - \lambda - 2}$$

- ניתן לראות ש-$p_A(\lambda) \neq p_B(\lambda)$, לכן המטריצות אינן דומות.

פתרון 2: נחשב את העקבה של כל מטריצה:

$\boxed{Trace(A) =}$ -1

$\boxed{Trace(B) =}$ 1

- ניתן לראות שהעקבות שונות, לכן המטריצות אינן דומות.

פתרון 3: נחשב את הדטרמיננטה של כל מטריצה:

$\boxed{\det(A) =}$ -6

$\boxed{\det(B) =}$ -2

- ניתן לראות שהדטרמיננטות שונות, לכן המטריצות אינן דומות.

דוגמה:

נתבונן במטריצות: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

שוויון דטרמיננטות, עקבות ופ"א הם תנאים הכרחיים לדמיון אך לא מספיקים!

- מתקיים: $\det(B) = 1$ $\det(A) = 1$ $\boxed{\det(A) = \det(B)}$
- מתקיים: $trace(B) = 2$ $trace(A) = 2$ $\boxed{trace(A) = trace(B)}$
- מתקיים: $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ $\boxed{p_A(\lambda) = p_B(\lambda)}$
- האם המטריצות דומות? **לא!**

מטריצת היחידה דומה רק לעצמה (הוכחנו).

שוויון הפולינום האופייני הוא תנאי הכרחי לדמיון אבל לא מספיק!

דוגמה נוספת לקריאה עצמית:

תהיינה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$P_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$P_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot \lambda = \lambda^2 - 2\lambda$$

$P_A \neq P_B$
לכן $A \nsim B$

(אפשר גם לראות לפי דטרמינטה)

תזכורת לגבי פולינומים

- יהיו $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ פולינומים ב-F[x].

- נאמר ש-$p(x) = q(x)$ אם מתקיים: (1) $m = n$

  (2) $\forall 0 \le i \le n: \quad a_i = b_i$

שימו לב: הפולינומים $q(x) = 1$, $p(x) = x^2 + x + 1$ מחזירים אותו ערך לכל $x \in \mathbb{Z}_2$,

אבל $p(x) \neq q(x)$ כי המקדמים שונים.

- נאמר ש-$p(x)|q(x)$ אם קיים $k(x) \in \mathrm{F}[x]$ כך ש-$q(x) = k(x) \cdot p(x)$.

למשל: $(x-1)|(x^3-1)$ כי $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$

- נאמר ש-$\alpha \in \mathrm{F}$ הוא **שורש של $p(x) \in \mathrm{F}[x]$** אם $p(\alpha) = 0_{\mathrm{F}}$.

- $\alpha \in \mathrm{F}$ הוא **שורש של $p(x)$** אם ורק אם $(x-\alpha)|p(x)$.

- אם $n = \deg(p(x))$ אזי ל-$p(x)$ יש לכל היותר n שורשים שונים ב-F (הוכחה באינדוקציה).
- לכן לכל מטריצה $A \in M_n(\mathrm{F})$ יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.

שימו לב: ייתכן שלפולינום $p(x)$ אין שורשים בכלל.

למשל: לפולינום $p(x) = x^2 + 1$ אין שורשים ב-$\mathbb{R}$.

- **המשפט היסודי של האלגברה:** יהי $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. אם $\deg p(x) \geq 1$

  אז ל-$p(x)$ יש לפחות שורש אחד.

לפולינום לא קבוע מעל המרוכבים יש לפחות שורש אחד.

מסקנה 3:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$. נניח ש-$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הם ערכים עצמיים שונים של A.
- אזי קיים $k(x) \in \mathrm{F}(x)$ כך ש- $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k) \cdot k(x)$

מסקנה 4:

- יהי $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. נניח ש-$n = \deg p(x) \geq 1$.
- אזי קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ וקיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש- $\boldsymbol{p(x) = c(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)}$

כל פולינום מעל המרוכבים ניתן לפירוק לגורמים לינאריים.

מסקנה 5:

- תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$.
- אזי קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ כך ש- $\boldsymbol{p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)}$

כל פ"א מתפרק לגורמים לינאריים מעל המרוכבים.

הוכחה:

- לפי מסקנה 4, קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ וקיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש- $\boldsymbol{p_A(\lambda)} = c(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$
- מהיות $\boldsymbol{p_A(\lambda)}$ פולינום מתוקן מתקיים $\boldsymbol{p_A(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ כנדרש.

הריבוי האלגברי הוא מספר הגורמים הלינאריים שהערך מאפס בפולינום.

הגדרה:

- יהי $p(x) \in F[x]$ ויהי $\alpha \in F$.
- **הריבוי האלגברי** של α הוא: $\boldsymbol{AM(\alpha) = \max\{0 \le l \in \mathbb{Z} \mid (x-\alpha)^l | p(x)\}}$

דוגמה:

יהי $p(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda-2)^2$

- מה הריבוי האלגברי של 2? $\boldsymbol{AM(2)} = 2$
- מה הריבוי האלגברי של 1-? $\boldsymbol{AM(-1)} = 3$
- מה הריבוי האלגברי של כל $\lambda \neq -1,2$? $\boldsymbol{AM(\lambda)} = 0$

הערה 1:

- נשים לב שמתקיים: $AM(\alpha) \le \deg(p(x))$.

תרגיל 1:

נתבונן בפולינום $p(x) = 1 + x + x^2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

מצאו את כל השורשים של $p(x)$ ב-$\mathbb{Z}_3$ ואת הריבוי האלגברי שלהם.

פתרון: יש רק 3 אפשרויות.. נחשב:

$$p(0) = 1$$

$$p(1) = 1 + 1 + 1 = 0$$

$$p(2) = 1 + 2 + 1 = 1$$

- לכן רק $\alpha = 1$ הוא השורש של $p(x)$.

- מכיוון ש-$1 \le AM(1) \le \deg(p(x)) = 2$ הרי שהריבוי האלגברי הוא או 1 או 2.
- נבדוק האם $(x-1)^2 | p(x)$:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1 = p(x)$$

- לכן $AM(1) = 2$.

תרגיל 2:

נתבונן בפולינום $p(x) = 1 + x + x^2 \in \mathbb{R}[x]$.

מצאו את כל השורשים של $p(x)$ ב- $\mathbb{R}$ ואת הריבוי האלגברי שלהם.

פתרון:

- למשוואה $1 + x + x^2 = 0$ אין פתרון ממשי.
- לכן לפולינום אין שורשים.
- הריבוי האלגברי של כל מספר ממשי הוא 0.

תרגיל 3:

נתבונן בפולינום $p(x) = 1 + x + x^2 \in \mathbb{C}[x]$.

מצאו את כל השורשים של $p(x)$ ב-$\mathbb{C}$ ואת הריבוי האלגברי שלהם.

פתרון:

- למשוואה $1 + x + x^2 = 0$ יש שני פתרונות ב-$\mathbb{C}$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

- לכן $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$
- מתקיים: $AM(\lambda_1) = AM(\lambda_2) = 1$

הריבוי הגיאומטרי הוא המימד של המרחב העצמי.
באופן לא פורמלי - כמה ו"ע בת"ל הוא "תורם" לבסיס.

הגדרה:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$ ויהי $\alpha \in \mathrm{F}$.
- **הריבוי הגיאומטרי** של α הינו: $GM(\alpha) = dim\, V_\alpha$
- כאשר V_α הוא המרחב העצמי של α ביחס למטריצה A.

הערה 2:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$ ויהי $\lambda \in \mathrm{F}$. אזי מתקיים $0 \le GM(\lambda) \le n$.
- בנוסף, λ ע"ע של A אם"ם $GM(\lambda) \ge 1$.

מספר המשתנים החופשיים שווה ל-(מטריצה)$n - rank$

משפט 1:

- תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$ ויהי $\alpha \in \mathrm{F}$. אזי:

$$GM(\alpha) = n - rank(\alpha \cdot I_n - A)$$

הוכחה:

- מתקיים:

מס'
הגנרטורים = $GM(\alpha) = \dim V_\alpha = \dim\big(Null(\alpha I_n - A)\big) = n - rank(\alpha \cdot I_n - A)$
החופשיים
כמצוכת,

דוגמה:

נתבונן במטריצה $A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אזי:

$$\boldsymbol{GM(1)} = \dim V_1 = \dim Null(\overset{1\cdot I_2}{I_2} - A) = \dim Null \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\forall \boldsymbol{\alpha \neq 1}: \quad \boldsymbol{GM(\alpha)} = 0$$

דוגמה:

נתבונן במטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אזי:

$$\boldsymbol{GM(1)} = \dim V_1 = \dim Null(I_2 - A) = \dim Null \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\underset{2 \quad - \quad 1}{n - rank \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right) = 1$$

$$\forall \boldsymbol{\alpha \neq 1}: \quad \boldsymbol{GM(\alpha)} = 0$$

ר"א ≤ ר"ג

משפט 2:

יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$. ויהי $\alpha \in \mathrm{F}$.

אזי $\boldsymbol{GM(\alpha) \le AM(\alpha)}$.

הוכחה:

- יהי V_α המרחב העצמי של α. כלומר, $\boldsymbol{V_\alpha} = \{\vec{x} \in \mathrm{F}^n \mid A\vec{x} = \alpha\vec{x}\}$
- נסמן: $l = \dim \boldsymbol{V_\alpha} = GM(\alpha)$.
- נרצה להוכיח ש- $l \le AM(\alpha)$.
- יהיו $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l \in \mathrm{F}^n$ בסיס של $\boldsymbol{V_\alpha}$. (אם $l = 0$ אז הבסיס הוא $\emptyset$)
- מהיות V_α תמ"ו של F^n, קיימים $\vec{v}_{l+1}, \dots, \vec{v}_n \in \mathrm{F}^n$ כך ש- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ בסיס. $(F^n - \emptyset)$
- נסמן $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.

כל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס.

ר"א ≤ ר"ג

- נזכיר שעבור ההעתקה הלינארית $T_A: \mathrm{F}^n \to \mathrm{F}^n$ המוגדרת $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ לכל $\vec{x} \in \mathrm{F}^n$

מתקיים: $[T_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_n} = A$ (כאשר $\mathcal{E}_n = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ הוא הבסיס הסטנדרטי של F^n)

- נבנה (חלקית) את $[T_A]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$. מהיות $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ ו"ע של A השייכים לע"ע α מתקיים:

$$\boxed{\begin{aligned} T_A(\vec{v}_1) &= A\cdot\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1 \\ &\vdots \\ T_A(\vec{v}_l) &= A\,\vec{v}_l = \alpha\vec{v}_l \end{aligned}}$$

- לכן l העמודות הראשונות ב-$[T_A]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ הן מהצורה:

$$[T_A(\vec{v}_i)]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{F}} \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ 0_{\mathrm{F}} \end{pmatrix} \leftarrow i \qquad \forall 1 \le i \le l$$

- כלומר:

$$[T_A]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{array}{c} \\ l \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} \alpha & & 0_{\mathrm{F}} & \\ & \ddots & & B \\ 0_{\mathrm{F}} & & \alpha & \\ \hline & 0_{\mathrm{F}} & & C \end{pmatrix}}^{n} \Big\} n = K$$

- כאשר $C \in M_{(n-l)\times(n-l)}(\mathrm{F})$, $B \in M_{l\times(n-l)}(\mathrm{F})$
- בנוסף ידוע כי $[T_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_n} \sim [T_A]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ולכן יש להן אותו פ"א.
- כלומר ל-K ול-A יש אותו פולינום אופייני.

- כעת נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(\lambda) = p_K(\lambda) = \det(\lambda I_n - K) = det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-\alpha & & 0 & \\ & \ddots & & -B \\ 0 & & \lambda-\alpha & \\ \hline & 0 & & \lambda I_{n-l} - C \end{array}\right) \underset{\text{טענה שהוכחה}}{=}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda-\alpha \end{pmatrix} \cdot \det(\lambda I_{n-l} - C) = (\lambda-\alpha)^l \cdot p_C(\lambda)$$

- לכן: $(\lambda-\alpha)^l | p_A(\lambda)$

$$\boxed{GM(\alpha) \le AM(\alpha) \text{ כלומר}}$$

משפט 3:

- יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $A \in M_n(\mathrm{F})$.
- יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathrm{F}$ ע״ע של A <u>השונים</u> זה מזה.
- יהיו $V_{\lambda 1}, V_{\lambda 2}, \dots, V_{\lambda k}$ המרחבים העצמיים המתאימים ל-$\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
- יהיו $l_1, \dots, l_k$ הריבויים הגיאומטריים של $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ בהתאמה.
- נסמן: $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = r$
- נסמן את הבסיסים של $V_{\lambda 1}, \dots, V_{\lambda k}$ באופן הבא:

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{l_1} \in V_{\lambda 1}$ בסיס ל-$V_{\lambda 1}$

$\vec{v}_{l_1+1}, \dots, \vec{v}_{l_1+l_2} \in V_{\lambda 2}$ בסיס ל-$V_{\lambda 2}$

$\vdots$

$\vec{v}_{l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}+1}, \dots, \vec{v}_r \in V_{\lambda k}$ בסיס ל-$V_{\lambda k}$

- אזי $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ בת״ל.

איחוד הבסיסים של מרחבים עצמיים של ע״ע שונים הוא קבוצה בת״ל.

(סכום המרחבים העצמיים הוא סכום ישר)

הוכחה: **נוכיח באינדוקציה על k.**

בסיס: נוכיח את נכונות הטענה עבור $k = 1$.

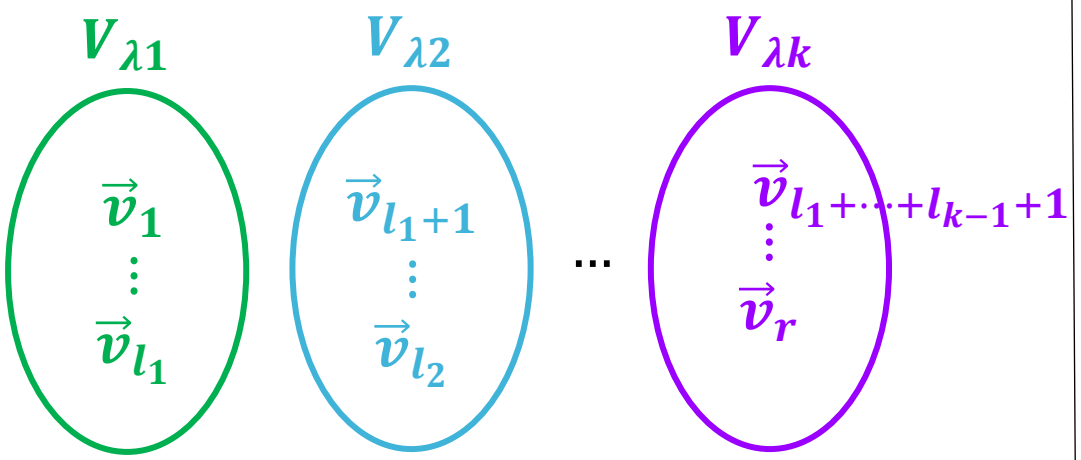
$k = 1$: ברור ש- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{l_1}$ בת"ל (כי הם בסיס ל- $V_{\lambda 1}$)

צעד: $\underbrace{\text{נניח נכונות עבור } k-1 \text{ ע"ע שונים ונוכיח}}_{\text{הנחת האינדוקציה: לכל } k-1 \text{ ע"ע שונים איחוד בסיסי המרחבים העצמיים שלהם הוא בת"ל.}}$ עבור k.

- יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F$ המקיימים: $\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_r\vec{v}_r = \vec{0}_V$
- נרצה להראות שמתקיים: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}$

k הוא מספר הערכים העצמיים השונים של A.

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{l_1} \in V_{\lambda 1}$$
$$\vec{v}_{l_1+1}, \dots, \vec{v}_{l_1+l_2} \in V_{\lambda 2}$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}_{l_1+l_2+\dots+l_{k-1}+1}, \dots, \vec{v}_r \in V_{\lambda k}$$



נזכיר:

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{l_1}$ שייכים לע"ע λ_1

$\vec{v}_{l_1+1}, \dots, \vec{v}_{l_1+l_2}$ שייכים לע"ע λ_2

...

$\vec{v}_{l_1+l_2+\dots+l_{k-1}+1}, \dots, \vec{v}_r$ שייכים לע"ע λ_k

$$*= l_1 + \dots + l_{k-1} + 1$$

$$\textbf{(1)} \quad \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_r\vec{v}_r = \vec{0}_V$$

הכפלת שני האגפים ב-A

$$A(\boldsymbol{\alpha_1}\vec{v}_1 + \dots + \boldsymbol{\alpha_r}\vec{v}_r) = \vec{0}_V$$

פילוג

$$\boldsymbol{\alpha_1} A\vec{v}_1 + \dots + \boldsymbol{\alpha_r} A\vec{v}_r = \vec{0}_V$$

תכונת ו"ע

$$\textbf{(2)} \quad (\alpha_1\boldsymbol{\lambda_1}\vec{v}_1 + \dots + \alpha_{l_1}\boldsymbol{\lambda_1}\vec{v}_{l_1}) + \dots + (\alpha_*\boldsymbol{\lambda_k}\vec{v}_* + \dots + \alpha_r\boldsymbol{\lambda_k}\vec{v}_r) = \vec{0}_V$$

- **כעת נכפיל את (1) ב-λ_1 ונחסר מ-(2):**

$$\textbf{(2)}-\boldsymbol{\lambda_1}\textbf{(1)} \qquad \alpha_{l_1+1}(\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{\lambda_1})v_{l_1+1} + \dots + \alpha_r(\boldsymbol{\lambda_k} - \boldsymbol{\lambda_1})v_r = \vec{0}_V$$

- מהיות $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ שונים, נסיק שכל הביטויים מהצורה $\lambda_m - \lambda_1$ $(2 \le m \le k)$ שונים מ-0.
- כמו כן, נשים לב שהוקטורים $\vec{v}_{l_1+1}, \dots, \vec{v}_r$ הם איחוד הבסיסים של $k-1$ ע"ע שונים ולכן מה"ה הם בת"ל.
- לכן בהכרח $\boxed{\alpha_{l_1+1} = \dots = \alpha_r = 0_F}$.

- לכן בהכרח $\boxed{\alpha_{l_1+1} = \cdots = \alpha_r = 0_F}$.
- כעת נתבונן שוב ב-**(1)**: $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_r\vec{v}_r = \vec{0}_V$ **(1)**

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + \cdots + \alpha_{l_1}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{l_1}} + \cancel{\boldsymbol{\alpha_{l_1+1}}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{l_1+1}} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_r}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}} = \vec{0}_V$$

- נציב את המקדמים $\alpha_{l_1+1} = \cdots = \alpha_r = 0_F$ ונקבל: $\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + \cdots + \alpha_{l_1}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{l_1}} = \vec{0}_V$
- אבל מהיות $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{l_1}}$ בסיס של $V_{\lambda 1}$ הרי שהם בת"ל ולכן: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l_1} = 0_F$
- סה"כ הוכחנו $\boldsymbol{\alpha_1} = \cdots = \boldsymbol{\alpha_r} = \mathbf{0}_F$.
- $\boxed{\text{לכן } \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \text{ בת"ל.}}$

משפט 4:

- יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהי $A \in M_n(\mathrm{F})$.
- יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathrm{F}$ כל הע"ע של A השונים זה מזה.
- יהיו $l_1, \dots, l_k$ הריבויים הגיאומטריים של $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ בהתאמה.

אזי שלושת התנאים הבאים שקולים:

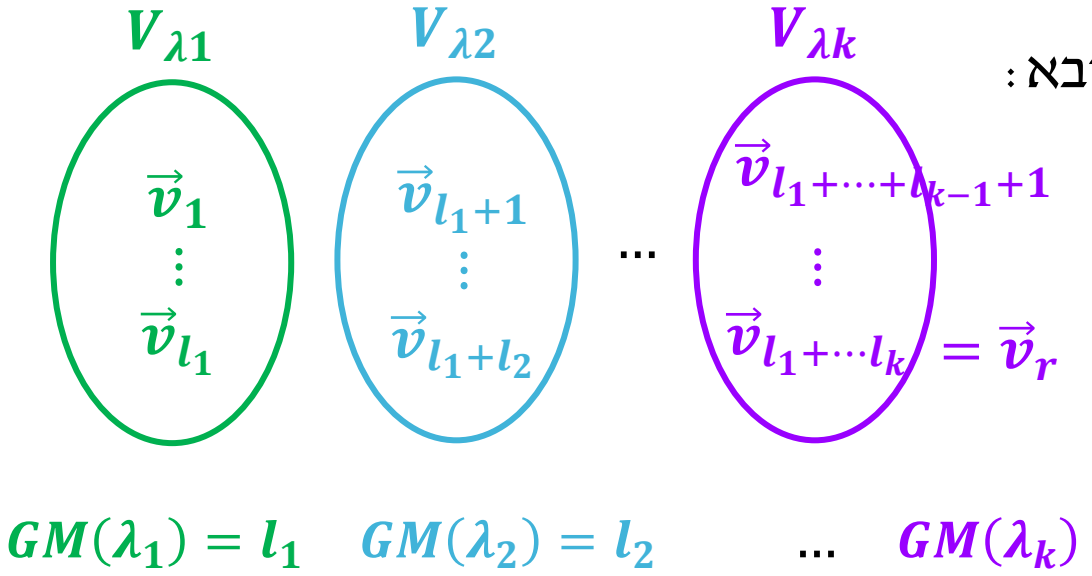
1. $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$.
2. A לכסינה.
3. הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים באופן הבא:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$$

סכום הר"ג הוא n
$\Updownarrow$
המטריצה לכסינה
$\Updownarrow$
הפ"א מתפרק לגורמים לינאריים כמתואר

הוכחה:

- נסמן $r = l_1 + l_2 + \cdots + l_k$.
- יהיו $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ הוי"ע המתאימים לעי"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ באופן הבא:



V_{λ_i} - המרחב העצמי של λ_i

- לכן לפי משפט 3 כל הוקטורים האלה הם בת"ל.

- כעת נוכיח: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$
- בכך נוכיח שתנאים $(1), (2), (3)$ הם שקולים.

$(1) \Rightarrow (2)$

נניח: $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$

נוכיח: A לכסינה

- מכיוון ש-$r = l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$ ומהיות $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ בת"ל הרי שהם מהווים בסיס ל-F^n.
- לכן יש בסיס של וקטורים עצמיים של A - כלומר A לכסינה!

$(3) \Rightarrow (1)$

נניח: הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים באופן הבא:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$$

נוכיח: $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$

- נשים לב: $\deg p_A(\lambda) = l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$ לכן מתקיים הדרוש.

(הוכחנו שמעלת הפולינום האופייני היא n).

נניח: A לכסינה.

נוכיח: הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים באופן הבא:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$$

$(2) \Rightarrow (3)$

- מהיות A לכסינה קיימת $P \in M_n(\mathrm{F})$ הפיכה וקיימת $D \in M_n(\mathrm{F})$ אלכסונית כך ש-$D = P^{-1}AP$.
- כמו כן, ממשפט שהוכחנו, D היא מהצורה הבאה:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0_{\mathrm{F}} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0_{\mathrm{F}} & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{l_1 \\ \text{פעמים}}}\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{l_2 \\ \text{פעמים}}}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{l_k \\ \text{פעמים}}}$$

$(2) \Rightarrow (3)$

נניח: A לכסינה

נוכיח: הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים באופן הבא:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$$

- מכיוון שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני מתקיים: $p_A(\lambda) = p_D(\lambda)$
- נחשב:

$$p_A(\lambda) = p_D(\lambda) = |\lambda I_n - D| = \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_1 \end{matrix}}_{l_1 \text{ פעמים}} & & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} \lambda-\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_2 \end{matrix}}_{l_2 \text{ פעמים}} & & \\ & & \underbrace{\begin{matrix} \lambda-\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_k \end{matrix}}_{l_k \text{ פעמים}} & \\ 0_F & & & \ddots \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$$

(אין צורך בדרישה שיתפרק לגורמים לינאריים)

כי כך כבר מוקמת ב-$\mathbb{C}$

מסקנה 1:

- תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. אזי A לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי λ של A מתקיים $\boldsymbol{GM(\lambda) = AM(\lambda)}$.

הוכחה: $\Longrightarrow$ **נניח:** לכל ערך עצמי λ של A מתקיים $GM(\lambda) = AM(\lambda)$. **נוכיח:** A לכסינה.

- יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ כל הערכים העצמיים השונים של A.
- נסמן: $\boldsymbol{GM(\lambda_i)} = l_i \qquad \boldsymbol{AM(\lambda_i)} = m_i \qquad \forall 1 \le i \le n:$
- לכן לפי ההנחה: $m_i = l_i$ לכל $1 \le i \le n$.
- מכיוון ש-$F = \mathbb{C}$, הרי שלפי מסקנה 5 מתחילת שיעור זה מתקיים:

$$\boldsymbol{p_A(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)^{\boldsymbol{m_1}} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\boldsymbol{m_k}} = (\lambda - \lambda_1)^{\boldsymbol{l_1}} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\boldsymbol{l_k}}$$

- לפי משפט 4, A לכסינה.

מסקנה 1:

- תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. אזי A לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי λ של A מתקיים $\boldsymbol{GM(\lambda) = AM(\lambda)}$.

הוכחה: $\Leftarrow$ **נניח:** A לכסינה. **נוכיח:** לכל ערך עצמי λ של A מתקיים $GM(\lambda) = AM(\lambda)$.

- לפי משפט 4: $\boldsymbol{p_A(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)^{\boldsymbol{l_1}} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\boldsymbol{l_k}}$
- לכן לכל $1 \leq i \leq n$: $\boldsymbol{AM(\lambda_i)} = l_i = \boldsymbol{GM(\lambda_i)}$

יש עוד תנאים שקולים שלא למדנו..

סיכום - תנאים שקולים ללכסינות מטריצה

- יהי F שדה. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $K \in M_n(\mathrm{F})$.
- K **לכסינה** אם מתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

המטריצה K דומה למטריצה אלכסונית

$\Updownarrow$

קיים ל-F^n בסיס של וקטורים עצמיים של K

$\Updownarrow$

סכום הריבויים הגיאומטריים של כל העייע של K הוא n

$\Updownarrow$

לכל עייע מתקיים: רייא=רייג + פולינום מתפרק לגורמים לינאריים

תרגיל 4: ממבחן 2022 מועד ב'

נתבונן במטריצה $A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

א. (6 נקודות) לכל $a \in \mathbb{R}$ מצאו את הע"ע של A ואת הריבויים האלגבריים המתאימים.

ב. (7 נקודות) מצאו עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A לכסינה. לכל a כזה מצאו מטריצה אלכסונית דומה ל-A.

פתרון:

- נתחיל מחישוב הפולינום האופייני של A.
- נזכור שהדטרמיננטה של מטריצה משולשת היא מכפלת איברי האלכסון:

$$p_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a^2 & 0 & -a \\ 0 & \lambda - 2a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - (a+2) \end{vmatrix} = (\lambda - a^2)(\lambda - 2a)(\lambda - (a+2))$$

- קיבלנו שהפולינום האופייני הוא: $(\lambda - a^2)(\lambda - 2a)(\lambda - (a+2))$
- כלומר הערכים העצמיים הם $a^2, 2a, a+2$.
- אבל נשים לב שיכול להיות שחלק מהע"ע זהים ⇦ זה משפיע על הריבוי האלגברי!
  - $a^2 = 2a$ כאשר $a = 0,2$
  - $a^2 = a + 2$ כאשר $a = -1,2$
  - $2a = a + 2$ כאשר $a = 2$
- לכן נפריד למקרים:

1. $\boldsymbol{a = 2}$: $\lambda = 4$ מר"א 3.
2. $\boldsymbol{a = 0}$: $\lambda_1 = 0$ מר"א 2, $\lambda_2 = 2$ מר"א 1.
3. $\boldsymbol{a = -1}$: $\lambda_1 = 1$ מר"א 2, $\lambda_2 = -2$ מר"א 1.
4. $\boldsymbol{a \neq 2,0,-1}$: $\lambda_1 = a^2$ מר"א 1, $\lambda_2 = 2a$ מר"א 1, $\lambda_3 = a + 2$ מר"א 1.

ב. (7 נקודות) מצאו עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A לכסינה.

לכל a כזה מצאו מטריצה אלכסונית דומה ל-A.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

4. $\boldsymbol{a \neq 2,0,-1}$: $\lambda_1 = a^2$ מר"א 1, $\lambda_2 = 2a$ מר"א 1, $\lambda_3 = a+2$ מר"א 1.

נתחיל ממה שקל!

- במקרה זה יש 3 ע"ע שונים.
- לפי טענה שהוכחנו, A לכסינה.
- מתקיים:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{2a} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a+2} \end{pmatrix}$$

---

2. $\boldsymbol{a = 0}$: $\lambda_1 = 0$ מר"א 2, $\lambda_2 = 2$ מר"א 1.

- נציב ונקבל את המטריצה:
- קל לראות ש-A אלכסונית ודומה לעצמה ולכן לכסינה.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

ב. (7 נקודות) מצאו עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A לכסינה.

לכל a כזה מצאו מטריצה אלכסונית דומה ל-A.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

1. $\boldsymbol{a = 2}$**:** $\lambda = 4$ מר"א 3.

- נציב ונקבל את המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- כדי לבדוק אם A לכסינה נחשב את $\dim V_4$.

- נחשב את $\mathrm{Null}(4I_3 - A)$:

$$\mathrm{Null}(4I_3 - A) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- קל לראות ש-

$$\dim\big(\mathrm{Null}(4I_3 - A)\big) = 2$$

- כלומר ל-$\lambda = 4$ יש 2 ו"ע בת"ל.
- מכיוון שאין ע"ע נוספים, אין עוד ו"ע בת"ל.
- לכן A **לא לכסינה**.

(הסכום נמוך: לפי מ' סקלרית)

ב. (7 נקודות) מצאו עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A לכסינה.

לכל a כזה מצאו מטריצה אלכסונית דומה ל-A.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{a = -1}$**:** $\lambda_1 = 1$ מר"א 2, $\lambda_2 = -2$ מר"א 1.

- נציב ונקבל את המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- עבור $V_1 = \mathrm{Null}(I_3 - A)$ נקבל:

$$\mathrm{Null}(\overset{1\cdot I_3}{I_3} - A) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- קל לראות ש-

$$\dim\big(\mathrm{Null}(I_3 - A)\big) = 1$$

- כלומר ל-$\lambda = 1$ יש וי"ע אחד בת"ל.
- באופן דומה עבור $V_{-2} = \mathrm{Null}(2I_3 - A)$ נקבל:

$$\mathrm{Nul}(2I_3 - A) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- קל לראות ש-$\dim\big(\mathrm{Null}(2I_3 - A)\big) = 1$
- כלומר ל-$\lambda = -2$ יש וי"ע אחד בת"ל.

(אפשר לחסום משני צדדים
$1 \le GM \le AM = 1$)

- אין בסיס של וי"ע לכן A **לא לכסינה**.